НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

«До захисту допущено»
В. о. завідувача кафедри
__________ О. Л. Тимощук
“___”_____________ 2019 р.

Комплексна дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
з напряму підготовки 6.040303 «Системний аналіз»
на тему: «Методи розв'язання багатовимірних задач квадратичного програмування. Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування. Квадратичний симплекс-метод»

Виконали: студентки IV курсу, групи КА-51

Корнійчук Анна Сергіївна ________

Корнійчук Оксана Сергіївна ________

Керівник:

доцент, к. ф.-м. н Яковлева А. П. ________

Консультант з норм контролю:

доцент, к. т. н. Коваленко А. Є. ________

Консультант з економічної частини:

доцент, к. е. н. Шевчук О. А. ________

Рецензент:

доцент, к. ф.-м. н., Ільєнко А. Б. ________

Засвідчуємо, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____________

Студент _____________

Київ – 2019 року

РЕФЕРАТ

Комплексна дипломна робота: 138 с., 3 т., 14 табл., 29 рис., 3 дод., 20 джерел.

ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, МЕТОД СПРЯЖЕНИХ ГРАДІЄНТІВ, НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, ЛІНІЙНИЙ РОЗВ’ЯЗОК, КВАДРАТИЧНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД, МЕТОД ЗОВНІШНІХ ШТРАФІВ, МЕТОД ВНУТРІШНІХ ШТРАФІВ, МЕТОД СПРЯЖЕНИХ НАПРЯМКІВ, НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

Темою роботи є методи розв'язання багатовимірних задач квадратичного програмування, зокрема і їх лінійний розв'язок та розв’язок квадратичним симплекс-методом.

Об’єктом дослідження є метод лінійного розв’язання задачі квадратичного програмування, квадратичний симплекс-метод та його застосування для знаходження рішення конкретних задач.

Предметом дослідження є задача квадратичного програмування, методи її розв’язання, лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування, застосування квадратичного симплекс-методу для розв’язання задачі квадратичного програмування.

Мета роботи:

- розгляд методів розв’язання задач квадратичного програмування;
- перевірка можливості застосування даного лінійного методу для розв’язання задач квадратичного програмування та його ефективності.
- аналіз ефективності застосування квадратичного симплексного методу.

Методи дослідження: Методи оптимізації, чисельні методи, програмна реалізація квадратичного симплекс-методу виконана в середовищі Jupyter Notebook.

ABSTRACT

Complex thesis: 138 pages, 3 volumes, 14 tables, 29 figures, 20 names of bibliographic sources.

PROBLEM OF QUADRATIC PROGRAMMING, CONJUGATE GRADIENT METHOD, NONLINEAR PROGRAMMING, MATHEMATICAL PROGRAMMING, LINEAR SOLUTION, QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEM, QUADRATIC SIMPLEX METHOD, PENALTY METHOD, BARRIER METHODS, CONJUGATED DIRECTIONS METHOD, NONLINEAR PROGRAMMING.

The theme of the work is the methods of solving multidimensional problems of quadratic programming, in particular, their linear solution and quadratic simplex method.

The object of the study are the method of linear solving of the quadratic programming problem and its application for finding solutions to specific problems, quadratic simplex method for solving quadratic programming problem.

The subject of the study is the problem of quadratic programming, methods for its solution, and the linear solution of the quadratic programming problem, the application of a quadratic simplex method for solving quadratic programming problem

The purpose of the work:

- consideration of methods for solving quadratic programming problems;
- checking the possibility of using this linear method for solving quadratic programming problems and its effectiveness.
- .the analysis of the efficiency of applying a quadratic simplex method.

Methods of research: Methods of optimization, numerical methods, program realization of a quadratic simplex method is performed in the Jupyter Notebook environment.

ЗМІСТ

ВСТУП

Задача квадратичного програмування є однією із базових задач, що виникають у різних проблемних сферах, зокрема в економіці при розподіленні ресурсів, фінансів, вкладів тощо, як допоміжна задача в математиці, у машинному навчанні, робототехніці, статистиці.

Тож не дивно, що при розробці чисельних методів багатовимірної оптимізації велика увага приділяється саме пошуку екстремуму квадратичних функцій. Вирішення цієї проблеми є корисним з багатьох причин. По-перше, розв'язок задачі мінімізації квадратичної функції можна записати в аналітичній формі і використати при оцінці похибки чисельного методу, а також при порівнянні різних методів між собою. По-друге, за допомогою квадратичної функції можна перевірити придатність чисельного методу для вирішення певних задач (якщо метод непридатний для мінімізації квадратичної функції, то, швидше за все, він не буде працювати і для більш складних цільових функцій). По-третє, двічі неперервно диференційована функція (якими є майже всі елементарні функції) добре апроксимується в околі заданої точки квадратичною функцією (таке наближення можна отримати за формулою Тейлора другого порядку). Це наближення дає змогу звести задачу мінімізації складної функції до послідовності задач мінімізації апроксимуючих квадратичних функцій.

Для знаходження екстремуму цільової функції в задачах квадратичного програмування існує багато спеціально розроблених методів. Також можна використовувати й методи нелінійної оптимізації.

Дана робота складається із трьох томів, з яких перша спеціальна частина присвячена лінійному розв'язку задачі квадратичного програмування і виконана студенткою Корнійчук Оксаною Сергіївною; у другій проводиться дослідження квадратичного симплекс-методу, вона виконана студенткою Корнійчук Анною Сергіївною.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1. Розглянути основні особливості задачі квадратичного програмування.
2. Визначити сфери її виникнення та застосування, навести приклади.
3. Зробити огляд методів вирішення задач квадратичного програмування, зокрема:
   – спряжених градієнтів
   – з булевими змінними
   – спряжених напрямів
   – внутрішніх штрафів
   – зовнішніх штрафів
   – лінійного методу
   – квадратичного симплекс-методу
4. Реалізувати лінійний метод розв’язання задач квадратичного програмування. Дослідити його ефективність у вирішенні даних задач.
5. Показати роботу лінійного методу на прикладах.
6. Програмно реалізувати квадратичний симплекс-метод. Дослідити його ефективність у вирішенні задач квадратичного програмування.
7. Показати роботу цього методу на прикладах.

РОЗДІЛ 1
ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Задача квадратичного програмування широко використовується у різних сферах, зокрема в економічних задачах розподілу ресурсів, фінансів, вкладів.

Серед інших застосувань даної задачі є її використання, наприклад, для підбору кривої в статистиці, для обчислення опорно-векторних машин (SVM) в машинному навчанні, для вирішення інверсної кінематики в робототехніці.

У цьому розділі описано основні теоретичні відомості щодо задач квадратичного програмування, а також наведені деякі приклади сфер їх виникнення та застосування.

1.1 Задача квадратичного програмування

Задача квадратичного програмування полягає у знаходженні мінімуму квадратичної функції при лінійних обмеженнях на аргумент [1], що векторно можна записати так:

$$\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) \to \min , \tag{1.1}$$

при обмеженнях

$$f_i(x) = \left(c^i, x\right) - d_i \leq 0 , i \in I^-, \tag{1.2}$$

$$f_i(x) = \left(c^i, x\right) - d_i = 0 , i \in I^0, \tag{1.3}$$

$$x \in X^0 = \left\{x \middle| x_i \geq 0,\ i = \overrightarrow{1, n}\right\}, \tag{1.4}$$

де $I^- = \{1, \dots, m\}$,

$I^0 = \{m+1, \dots, m+p\}$,

A – симетрична додатно визначена матриця розмірності n x n,

вектор $b \in R^n$.

Вважатимемо систему обмежень сумісною.

Лема. У задачі КП нижня границя або досягається, або дорівнює $-\infty$.

Теорема. Необхідні і достатні умови мінімуму в задачі КП

Для того, щоб точка x^* була розв’язком задачі КП необхідно і достатньо, щоб існували такі числа $u_i^*,\ i \in I^- \cup I^0$, що

$$Ax^* + b + \sum_{i \in I^- \cup I^0} u_i^* c^i = 0, \tag{1.5}$$

$$u_i^* = 0,\ \text{якщо}\ \left(c^i, x^*\right) - d_i < 0,\ i \in I^-, \tag{1.6}$$

$$u_i^* \geq 0,\ i \in I^-. \tag{1.7}$$

Якщо I^- - порожня множина, то необхідні і достатні умови визначаються співвідношенням (1.5), обмежень на $u_i^*,\ i \in I^0$ немає.

Вектор ,u^*з компонентами $u_i^*,\ i \in I^- \cup I^0$є вектором множників Лагранжа. В задачі опуклого програмування він є розв’язком двоїстої задачі, тому його ще називають вектором двоїстих змінних.

Позначатимемо

M, N, P, … – довільні індексні множини (скінчені набори цілих чисел);

|M| - кількість елементів, які містяться в M;

x = x[N] – вектор з компонентами x[j], j ϵ N;

$(x, y) = x[N] \cdot y[N] = \sum_{j\epsilon N} x[j] \cdot y[j]$ – скалярний добуток векторів x і y;

$A = A[M, N]$ – матриця з компонентами $A[i, j]$, $i \epsilon M, j \epsilon N$;

$v = Ax = A[M, N] \cdot x[N]$ – вектор з компонентами

$$v[i] = A[i, N] \cdot x[N] = \sum_{j\epsilon N} A[i, j] \cdot x[j], \quad i \epsilon M. \tag{1.8}$$

Перепишемо задачу у нових позначеннях:

$$F(x) \coloneqq \frac{1}{2}(Dx, x) + (c, x) + \alpha, \tag{1.9}$$

де D – матриця порядку n,

c – вектор з R^n,

α – число.

Якщо матриця D не симетрична, то її можна замінити на симетричну матрицю

$$D_0 = \frac{1}{2}(D + D^T), \tag{1.10}$$

Оскільки

$$(D_0 x, x) = \frac{1}{2}\Big((Dx, x) \ + (D^T x, x)\Big) = (Dx, x). \tag{1.11}$$

При розв’язанні задачі (1.9) константу α можна відкинути, оскільки вона не впливає на розв’язок.

Отже, маємо задачу квадратичного програмування:

$$F(x) \coloneqq \frac{1}{2}(Dx, x) + (c, x) \to \inf_{x\epsilon\Omega}, \tag{1.12}$$

де матриця D[N, N] симетрична, а

$$\Omega = \left\{ x[N] \left| \begin{array}{c} A[M_1, N] \cdot x[N] > b[M_1], \\ A[M_2, N] \cdot x[N] = b[M_2], \\ x[N_1] \geq 0, \;\; N_1 \subset N \end{array} \right. \right\}. \qquad (1.13)$$

Будемо вважати, що матриця D невід’ємно визначена, таким чином функція $F(x)$ опукла на Ω.

Задача, в якій цільова функція (1.9) опукла на допустимій множині, називається задачею опуклого квадратичного програмування (ОКП). Частинним випадком задачі (1.9), коли D = 0, є задача лінійного програмування [2].

1.2 Форми запису задач квадратичного програмування

Зазвичай, методи опуклого квадратичного програмування і лінійного програмування описуються для задач, представлених у стандартній формі. Запишемо форми запису задачі опуклого квадратичного програмування [2].

Перша канонічна форма:

$$F(x) \to \inf, \qquad (1.14)$$

$$A[M, N] \cdot x[N] = b[M], \qquad (1.15)$$

$$x[N] \geq 0. \qquad (1.16)$$

Друга канонічна форма:

$$F(x) \to \inf, \tag{1.17}$$

$$A[M, N] \cdot x\,[N] \geq b[M]. \tag{1.18}$$

Симетрична форма:

$$F(x) \to \inf, \tag{1.19}$$

$$A[M, N] \cdot x\,[N] \geq b[M], \tag{1.20}$$

$$x[N] \geq 0. \tag{1.21}$$

Як відомо, загальну задачу (1.9) можна звести до будь-якої із стандартних форм за допомогою наступних операцій.

При переведенні у першу канонічну форму нерівність при $i \in M_1$ можна перетворити у рівність шляхом додавання нової змінної $v[i] \geq 0$, так що

$$A[i, N] \cdot x[N] - v[i] = b[i]. \tag{1.22}$$

При цьому збільшується порядок матриці D і розмірність вектора c, тобто для змінної $v[i]$ до матриці D додаються нульові рядок та стовпчик, а у вектор c додаються відповідні нульові компоненти.

При переведенні у другу або симетричну форми рівність при $i \in M_2$ можна замінити двома нерівностями

$$\mathrm{A[i,N]} \cdot \mathrm{x[N]} \geq \mathrm{b[i]}, \tag{1.23}$$

$$-\mathrm{A[i,N]} \cdot \mathrm{x[N]} \geq -\mathrm{b[i]}. \tag{1.24}$$

Щоб всі змінні зробити невід'ємними, змінні $\mathrm{x[i]}$ для $\mathrm{i} \in \mathrm{N}_2 \coloneqq \mathrm{N} \setminus \mathrm{N}_1$ можна представити у вигляді різниці двох невід'ємних змінних

$$\mathrm{x[i]} = \mathrm{x}'[\mathrm{i}] - \mathrm{x}''[\mathrm{i}] \tag{1.25}$$

і підставити їх в обмеження і цільову функцію. Очевидно, що порядок матриці D і розмірність вектора c збільшаться на $|\mathrm{N}_2|$ одиниць.

Таким чином, переведення задачі у будь-яку стандартну форму приводить до збільшення або кількості змінних, або обмежень, або і того, й іншого. У деяких випадках це збільшення може виявитися занадто великим, що зробить складнішим процес реалізації обраного методу. Тому при розв'язанні деякої конкретної задачі вибір методу доцільно пов'язувати із мінімальним збільшенням розмірів задачі.

1.3 Застосування

Існує небагато реальних задач техніко-економічного змісту, математичними моделями яких є задачі квадратичного програмування. Однак задачі квадратичного програмування є основною допоміжною задачею при розв'язанні загальних нелінійних проблем. Практика розрахунків показала, що від того, на скільки ефективний використаний алгоритм розв'язку задачі квадратичного програмування, залежить і ефективність всього алгоритму нелінійного програмування в цілому.

Задачі опуклого квадратичного програмування на практиці виникають дуже часто і у різних ситуаціях. Далі будуть наведені деякі приклади застосування цих задач.

1.3.1 Розв'язання перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай необхідно розв'язати перевизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь [2]

$$A[M,N] \cdot x\,[N] = b[M], \tag{1.26}$$

$$|M| > |N|. \tag{1.27}$$

Така система, як правило, несумісна. Потрібно знайти вектор x, який у деякому сенсі найкраще задовольняє цю систему, наприклад такий, який мінімізує функціонал

$$F(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2. \tag{1.28}$$

Тут використовується евклідова норма.

Можна помітити, що

$$F(x) = \frac{1}{2}(Dx, x) + (c, x) + \frac{1}{2}(b, b), \tag{1.29}$$

де $D = A^T A$,

$c = -A^T b$.

Зрозуміло, що матриця D невід'ємно визначена. При цьому на змінні можуть накладатися додаткові лінійні умови вигляду

$$\alpha[P] \le B[P, N] \cdot x[N] \le \beta[P]. \tag{1.30}$$

Таким чином, розв’язок перевизначеної системи можна звести до розв’язку задачі опуклого квадратичного програмування.

1.3.2 Знаходження функції мінімізації інтеграла

Нехай потрібно знайти функцію w(t), яка мінімізує інтеграл [2]

$$I(w) \coloneqq \int_0^n ((w'(t))^2 + f(t)w(t)^2 + g(t)w(t))dt \qquad (1.31)$$

при w(0) = 0, w(a) = 0.

Розділимо проміжок [0, a] на n частин рівновіддаленими точками: $0 = t_0 <$ $< t_1 < \cdots < t_n = a$. Покладемо

$$z_i = w(t_i), \qquad (1.32)$$

$$f_i = f(t_i), \qquad (1.33)$$

$$g_i = g(t_i), \qquad (1.34)$$

$$h = \frac{a}{n}. \qquad (1.35)$$

Замінимо похідну $w'(t_i)$ різницевим відношенням $\frac{z_{i+1}-z_i}{h}$, а інтеграл – сумою

$$S(z) \coloneqq h \sum_{i \in 0:n-1} \left(\left(\frac{z_{i+1}-z_i}{h} \right)^2 + f_i z_i^2 + g_i z_i \right). \qquad (1.36)$$

Замість вихідної задачі вирішуватимемо дискретну задачу

$$S(z) \to \inf_{z \in \mathbf{R}^{(n+1)}} \tag{1.37}$$

при $z_0 = 0, z_n = 0.$ Очевидно, що ця задача є задачею опуклого квадратичного програмування. Її розв'язок при великих n є достатньо хорошим наближенням до розв'язку вихідної задачі.

1.3.3 Метод лінеаризації

Для розв'зання задач математичного програмування часто використовують метод лінеаризації [3], який є одним із найефективніших для вирішення даних задач. Хоча технічно він є досить складним, проте він дозволяє знаходити рішення задач не лише з нелінійною цільовою функцією, а також і з нелінійними обмеженнями навіть типу рівностей.

Метод лінеаризації ґрунтується на лінійній апроксимації цільової функції та обмежень в околі заданої точки. Проте до лінійної апроксимації додається ще квадратичний член. Саме тому як допоміжну ми отримуємо задачу квадратичного програмування.

При розв'язанні цільова функція зводиться до квадратичної шляхом вибору перших двох членів її розкладу в ряд Тейлора. Обмеження теж спрощуються завдяки вибору першого члена їх розкладу в ряд Тейлора.

Нехай дана задача математичного програмування:

$$f(x) \to \min, \tag{1.38}$$

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \quad (1.39)$$

де функція f диференційовна, а функції $g_1, \dots, g_m$ – диференційовні та опуклі на R^n.

Нехай X – допустима множина задачі (1.38) – (1.39). Будемо вважати, що X непорожня.

Поставимо у відповідність довільній точці $x \in R^n$ задачу квадратичного програмування відносно h:

$$(f'(x), h) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \to \min, \quad (1.40)$$

$$(g_i'(x), h) + g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \quad (1.41)$$

Ця задача була отримана на основі лінійних частин розкладів

$$f(x + h) = f(x) + (f'(x), h) + o(\|h\|), \quad (1.42)$$

$$g_i(x + h) = g_i(x) + (g_i'(x), h) + \ o(\|h\|), i = 1, \dots, m. \quad (1.43)$$

Крім того, до цільової функції був доданий квадратичний член $\frac{1}{2}\|h\|^2$, а константа f(x) відкинута.

1.3.4 Задача фінансиста

Фінансисту потрібно розподілити свої фонди між можливими інвестиціями, врахувавши при цьому дисперсію прибутку [4]. Припустимо, що інвестиції і відповідає очікуваний прибуток $\overline{p_\imath}$ з кожної вкладеної грошової одиниці (що інвестиція і має очікуваний прибуток на кожну вкладену грощову одиницю (умовну одиницю)). Позначимо x_i – розмір вкладу в і-ту інвестицію. Тоді очікуваний прибуток можна знайти за формулою

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i x_i. \tag{1.44}$$

Крім того, портфель вкладів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ повинен задовольняти такі обмеження:

$$Ax = b,\ x \geq 0, \tag{1.45}$$

де A – матриця $m \times n$,

b – m-вимірний вектор.

Дані математичні обмеження відображають реальні обмеження фінансиста, наприклад, сумарні фонди, ліміти на кількість (розмір?) фондів, вкладених в певну категорію інвестицій тощо. Оскільки може виявитися, що прибуток має доволі велику дисперсію, нехтування якою буде негативно впливати на розв’язок, потрібно її врахувати. Для цього припустимо, що q_{ij} – коваріація між вкладами і та j на? кожну грошову одиницю, вкладену у відповідний тип інвестицій. Тоді отримуємо коваріаційну матрицю $Q = (q_{ij})$. Дисперсія для будь-якого портфелю x матиме вигляд $x^T Q x$.

Таким чином у результаті отримуємо задачу квадратичного програмування:

$$\min x^T Q x \tag{1.46}$$

$$Ax = b,\ x \geq 0, \tag{1.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} x_i \geq c \qquad (1.48)$$

Тобто, фінансисту потрібно обрати портфель вкладів, що мінімізуватиме дисперсію та при цьому забезпечуватиме обсяг очікуваного прибутку не менший деякого фіксованого с.

1.3.5 Визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів

Ще одним прикладом є задача визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів [5].

Нехай x = $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – обсяг продукції, i – вид сировини, при чому i = $\overrightarrow{1, m}$. b_i – наявний обсяг i-го виду сировини, $q_i(x)$ – обсяг i-го виду сировини, що необхідний для виробництва продукції обсягом x. Тоді $g_i(x)$ – залишок i-го ресурсу після виробництва продукції:

$$g_i(x) = b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, i = \overrightarrow{1, m} \qquad (1.49)$$

Випадок $g_i(x) > 0$ означає, що використали не весь обсяг наявної сировини. Якщо $g_i(x) = 0$, то ресурс вичерпано повністю. Коли ж $g_i(x) < 0$, то це означає, що початкової кількості сировини не достатньо для виробництва продукції в заданому обсязі x. Метою виробництва є тримання максимального прибутку від виготовленої продукції.

Таким чином отримуємо задачу квадратичного програмування:

$$\max F = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (1.59)$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = \overrightarrow{1, m} \qquad (1.60)$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n}. \quad (1.61)$$

Цільова функція $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – прибуток, отриманий від реалізації виробленої продукції в обсязі $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, причому вона є нелінійною.

1.3.6 Задача вибору портфеля цінних паперів

Визначення оптимального портфеля цінних паперів [6] являє собою одне з найважливіших завдань, з якими стикаються інвестиційні фірми - банки, фонди, страхові компанії та приватні особи.

Під портфелем маємо на увазі розміри вкладень в різні види цінних паперів: звичайні облігації, облігації короткострокових державних позик, банківські депозитні сертифікати, акції та ін.

Розглянемо фінансову операцію, пов'язану з придбанням ризикованих цінних паперів за відомою ціною і продажем їх у майбутньому за невідомою заздалегідь ціною. Будемо вважати, що інвестор зараз інвестує деяку суму грошей у цінні папери. Ці гроші будуть вкладені на певний період часу, який називається періодом володіння. Наприкінці цього періоду інвестор продає цінні папери, які були придбані на початку періоду. Таким чином, в момент t = 0, інвестор повинен прийняти рішення про придбання цінних паперів, які будуть у його портфелі до t = 1. Це завдання називається задачею вибору інвестиційного портфеля.

Ефективність ризикованих цінних паперів залежить від трьох факторів: ціни під час придбання, яка точно відома; проміжних платежів за період володіння (дивідендів), які точно не відомі; ціни продажу, яка невідома. Таким чином, фінансова операція, що передбачає придбання цінних паперів з метою отримання певного доходу в майбутньому, є ризикованою. Основна гіпотеза, що дозволяє проаналізувати таку операцію, полягає в наступному: ми припускаємо, що кожне конкретне значення ефективності такої фінансової операції є реалізацією випадкової величини

$$R = \frac{C_1 - C_0 + D}{C_0}, \qquad (1.62)$$

де C_0- ціна при купівлі,

C_1 – ціна продажу,

D – дивіденди, виплачені за період володіння.

Створюючи портфель цінних паперів, інвестор хотів би максимізувати очікувану прибутковість портфеля з мінімальним ризиком. Як правило, ці дві мети суперечать одна одній. При прийнятті рішення інвестор прагне забезпечити збалансованість цих двох цілей.

Прибутковість портфеля також є випадковою змінною:

$$R_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0}, \qquad (1.63)$$

де W_0 – загальна вартість цінних паперів при придбанні, що увійшли в портфель на момент t = 0,

W_1 – загальна ринкова вартість цінних паперів в момент t = 1 та загальний дохід від цих цінних паперів (дивіденди), який власник отримує за період володіння від t = 0 до t = 1.

Будь-яку випадкову величину можна охарактеризувати двома параметрами: очікуваним або середнім значенням (математичне сподівання) і стандартним відхиленням (середньоквадратичне відхилення).

Відповідно до розглянутої моделі, передбачається, що інвестор базується на виборі портфеля тільки за цими двома параметрами. Тому інвестор повинен оцінити очікуваний прибуток і стандартне відхилення кожного можливого портфеля. Потім він повинен вибрати кращий з портфелів на основі співвідношення цих двох параметрів. У цьому випадку очікувана прибутковість розглядається як показник потенційної винагороди, пов'язаної з певним портфелем, а стандартне відхилення - як показник ризику, пов'язаного з даним портфелем.

Отже, розглянемо фінансову операцію, що полягає у купівлі цінних паперів в момент t = 0 за відомою ціною і продажу їх у момент t = 1 за ціною, не відомою заздалегідь. У цьому випадку інвестор може розраховувати на отримання проміжних платежів. Позначимо m = M(R) - очікуване значення ефективності цінного паперу - математичне сподівання випадкової величини R (це середнє значення для всіх реалізацій (значень) випадкової величини, обчислене з урахуванням частоти їх можливого входження), $V = M\{(R - m)^2\}$ - дисперсія або варіація випадкової величини - міра відхилення випадкової величини R від її очікуваного значення в середньому. Часто замість дисперсії використовується середньоквадратичне відхилення або стандартне відхилення $\sigma = \sqrt{V}$.

Коваріація

$$V_{12} = M\{(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)\} \tag{1.64}$$

характеризує статистичну залежність двох випадкових величин R_1 та R_2.

Ризик інвестування в конкретні цінні папери пов'язаний з невизначеністю майбутніх доходів і, отже, невизначеністю ефективності цієї операції. Чим більше стандартне відхилення, тим більше випадкова величина може відхилятися від свого очікуваного значення в середньому, тим більша невизначеність і тим вищий ризик. З іншого боку, якщо σ = 0, то ефективність не відхиляється від свого очікуваного значення, вона приймає певні невипадкові значення, а ризику немає. Таким чином, стандартне відхилення описує рівень ризику, пов'язаного з певними цінними паперами, і приймається як міра ризику.

Припустимо, що інвестор вкладає гроші не в один вид цінних паперів, а в декілька. У цьому випадку говориться, що інвестор диверсифікує свій портфель. Розглянемо вплив такої диверсифікації.

Нехай x_j (j = 1,2, ..., n) - частка загального обсягу інвестицій, що відносяться до j-го типу цінних паперів; n - кількість видів цінних паперів, які інвестор включає в портфель. Очевидно, що повинна виконуватися рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{1.65}$$

Нехай R_p – ефективність портфеля, R_j – ефективність $j-$го цінного паперу. Тоді

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j. \tag{1.66}$$

Очікувана ефективність портфеля:

$$m_p = M\{R_p\} = \sum_{j=1}^{n} x_j M\{R_j\} = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j, \tag{1.67}$$

де $m_j = M\{R_j\}$ – очікувана ефективність $j-$го цінного паперу.

Відхилення від очікуваної ефективності:

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j). \tag{1.68}$$

Дисперсія ефективності портфеля:

$$V_p = M\left\{\left(R_p - m_p\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \tag{1.69}$$

де $V_{ij} = M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\}$ – коваріація випадкових ефективностей R_i та R_j i – го та j – го видів цінних паперів.

Можемо також бачити, що:

$$V_{jj} = M\left\{\left(R_j - m_j\right)^2\right\} = \sigma_j^2. \qquad (1.70)$$

Значення V_p (або σ_p) характеризує невизначеність портфеля в цілому і називається ризиком портфеля.

За цими припущеннями можна сформулювати наступну задачу оптимізації: визначити частки інвестицій x_j (j = 1,2, ..., n), що мінімізуватимуть варіацію (ризик) портфеля:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \qquad (1.71)$$

за умови, що буде гарантуватися задане значення m_p очікуваної ефективності портфеля:

$$m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j. \qquad (1.72)$$

Крім того, повинні також виконуватися додаткові обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0 \qquad (1.73)$$

для всіх j = 1,2, ..., n.

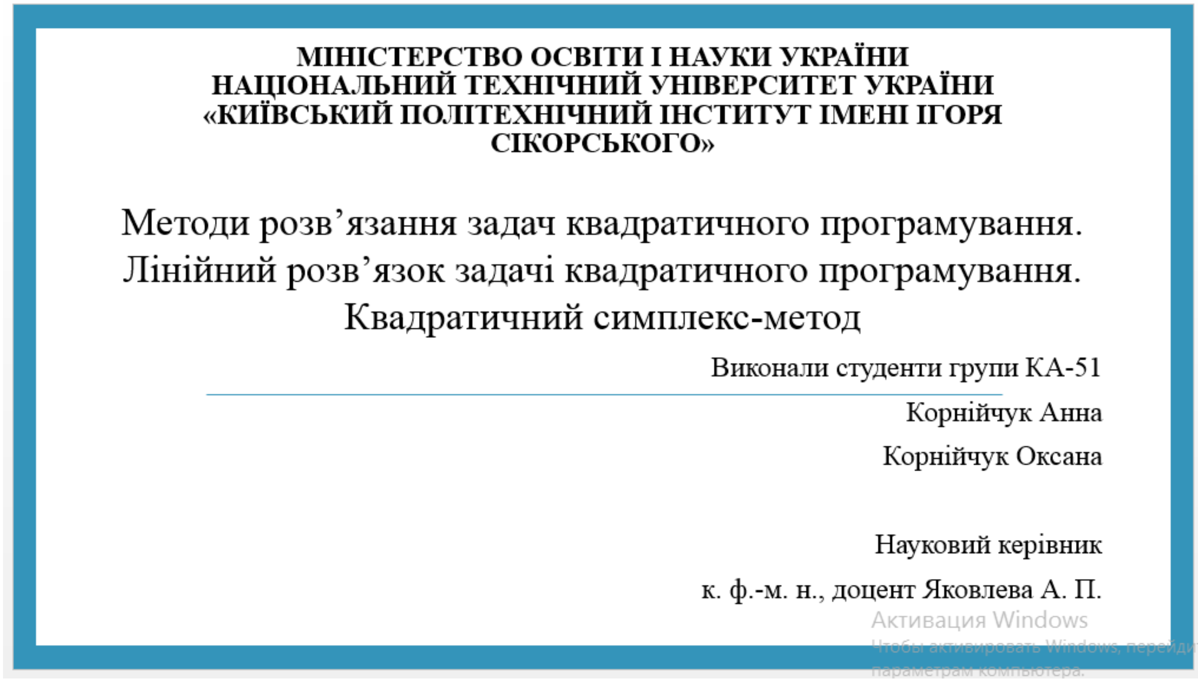
В даній моделі цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

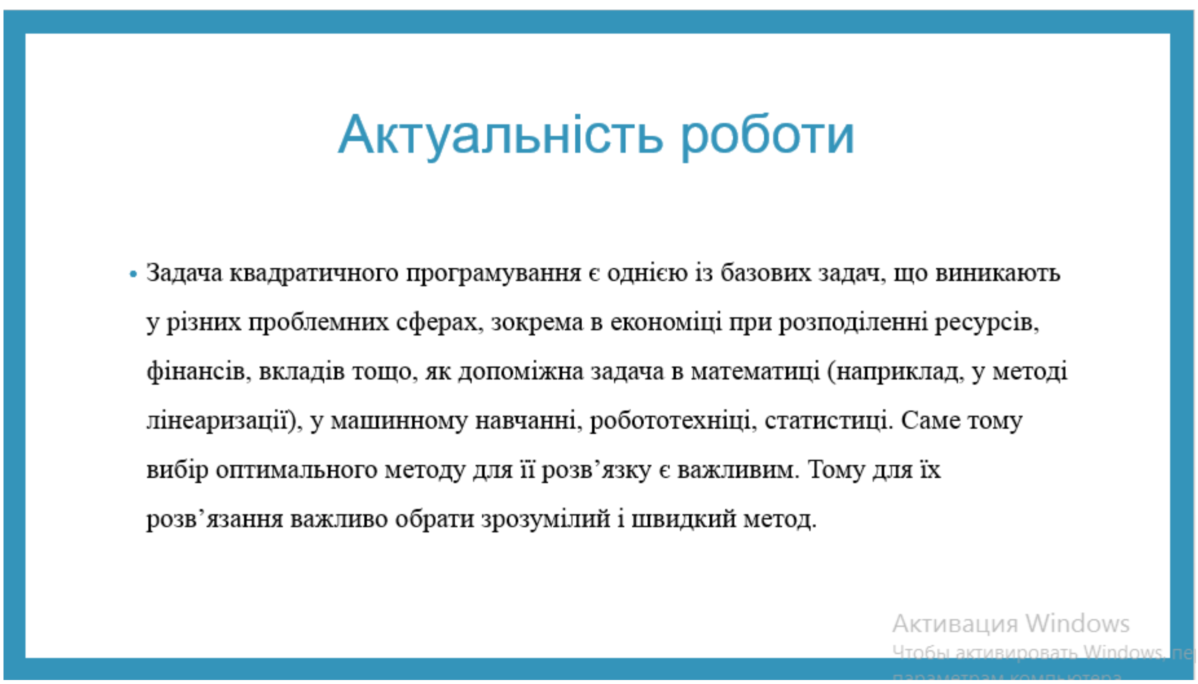
ВИСНОВКИ

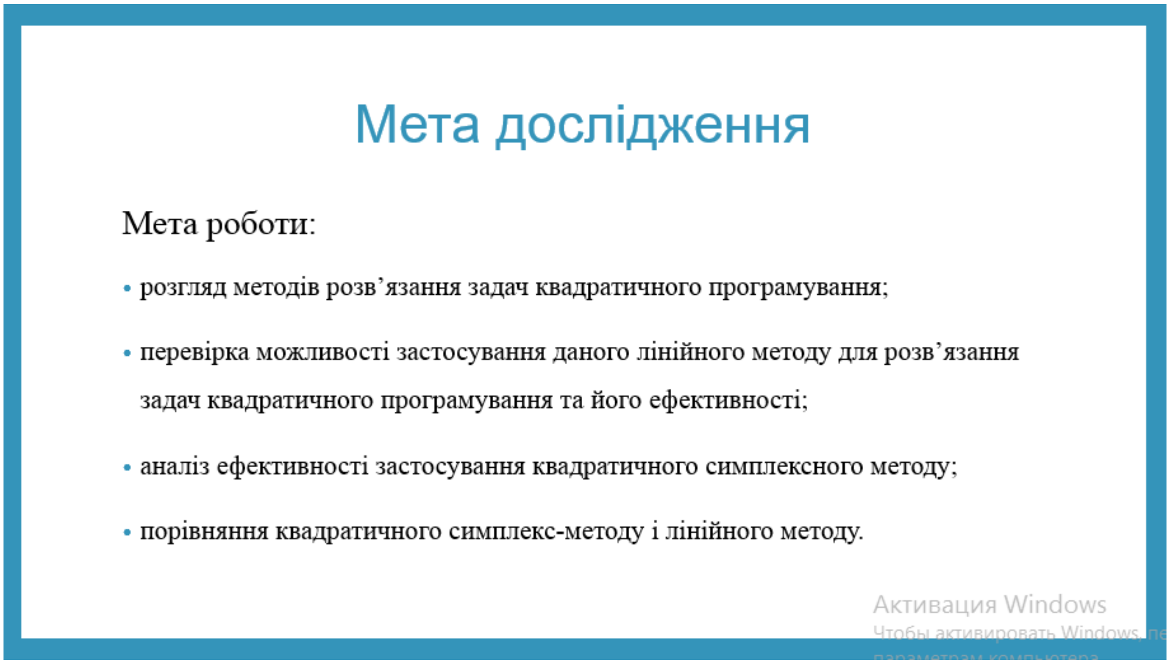
У ході виконання дипломної роботи було розглянуто задачу квадратичного програмування та її особливості: постановку задачі, необхідні і достатні умови існування екстремуму, форми запису. Задачі квадратичного програмування є матмоделями багатьох техніко-економічних проблем. Ця задача широко використовується у різних галузях, зокрема у економіці, машинному навчанні, робототехніці, математиці, статистиці. Також задачі квадратичного програмування часто використовуються як допоміжні при розв’язанні загальних нелінійних проблем. Наприклад, вони виникають у потужному методі лінеаризації.

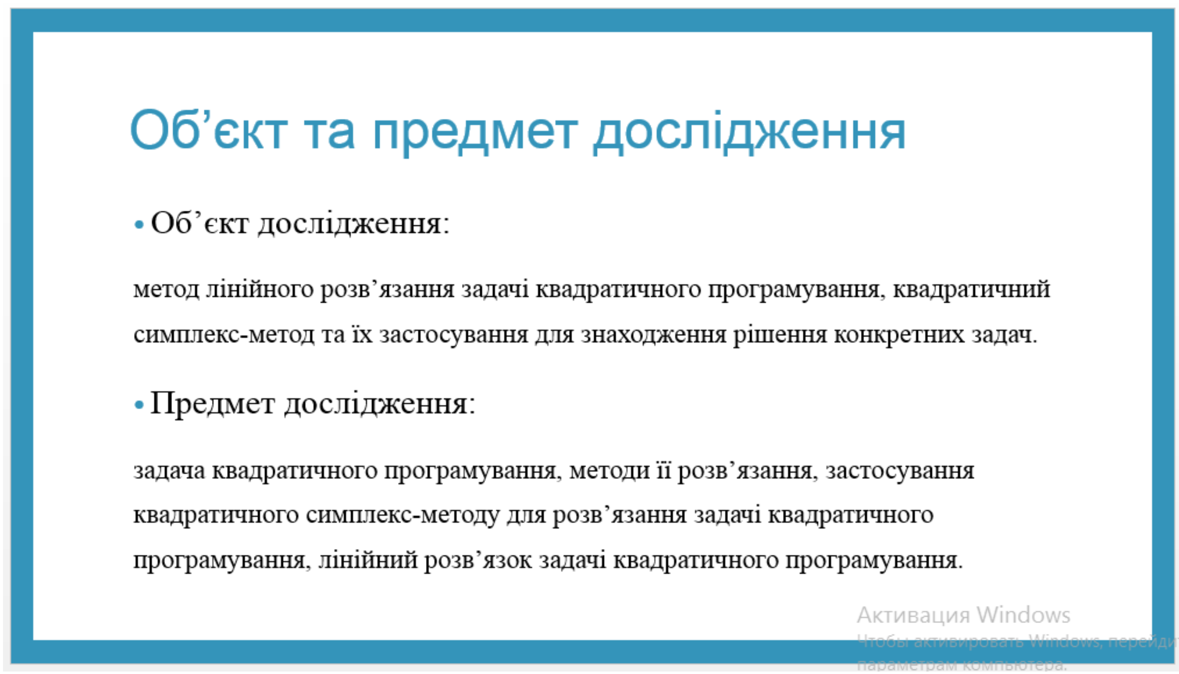
Було розглянуто формалізацію деяких прикладних задач квадратичного програмування, серед яких задача фінансиста, задача вибору портфеля цінних паперів.

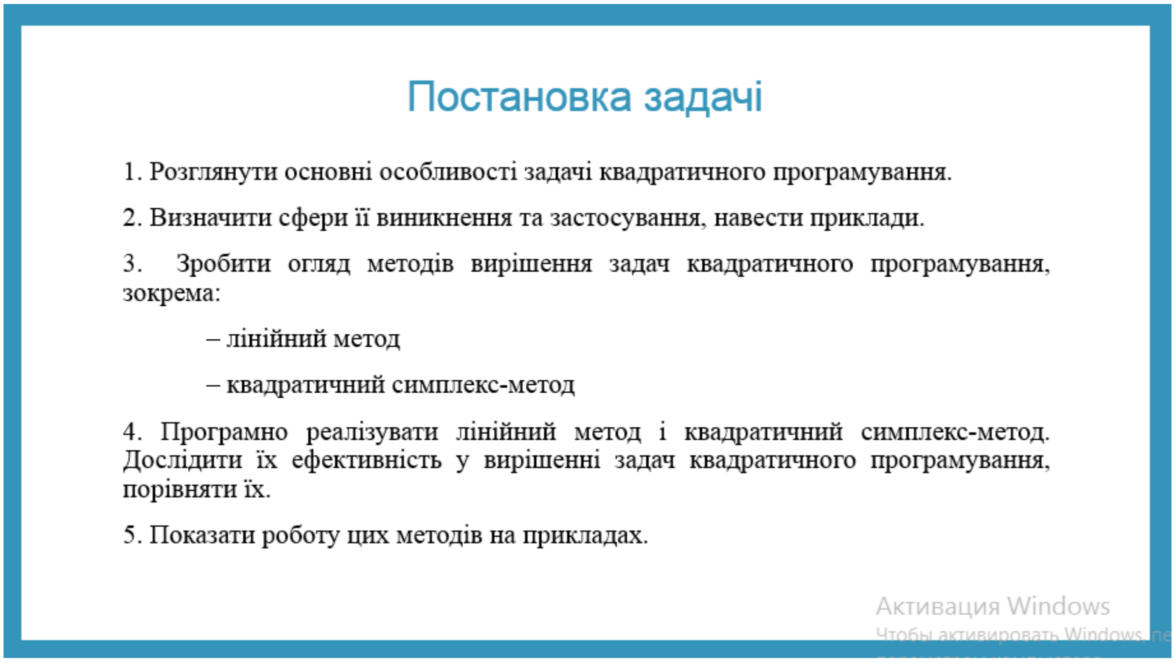
ДОДАТОК А ПРЕЗЕНТАЦІЯ

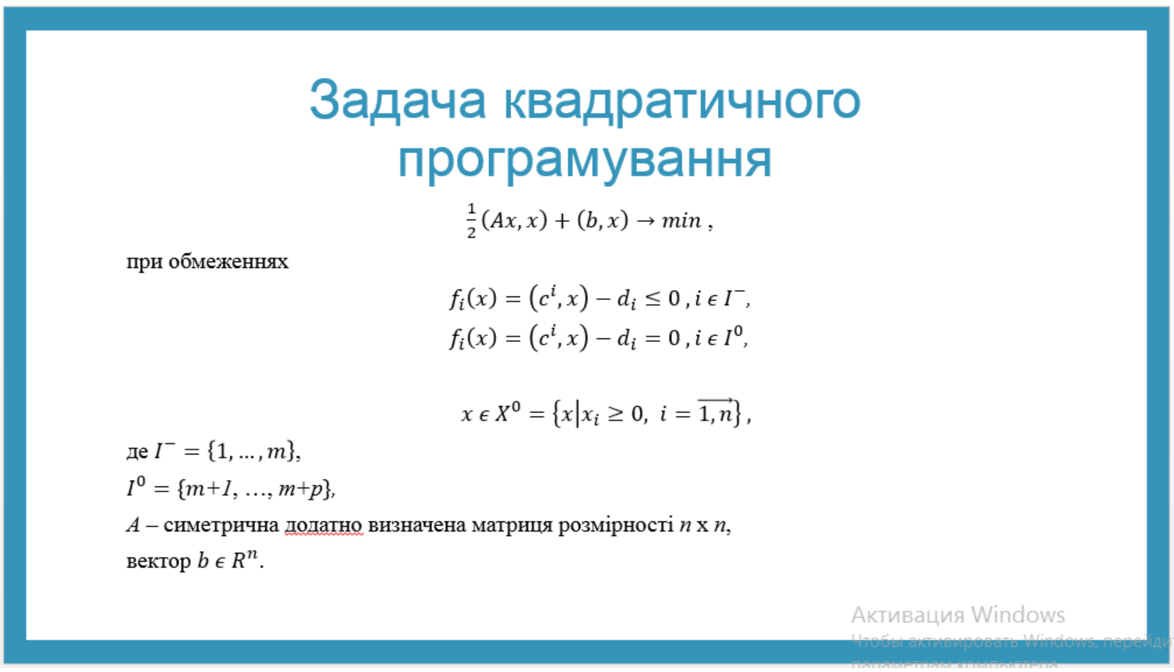





Мета дослідження
Мета роботи:
• розгляд методів розв’язання задач квадратичного програмування;
• перевірка можливості застосування даного лінійного методу для розв’язання задач квадратичного програмування та його ефективності;
• аналіз ефективності застосування квадратичного симплексного методу;
• порівняння квадратичного симплекс-методу і лінійного методу.
Активация Windows


Об’єкт та предмет дослідження
• Об’єкт дослідження:
метод лінійного розв’язання задачі квадратичного програмування, квадратичний симплекс-метод та їх застосування для знаходження рішення конкретних задач.
• Предмет дослідження:
задача квадратичного програмування, методи її розв’язання, застосування квадратичного симплекс-методу для розв’язання задачі квадратичного програмування, лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування.
Активация Windows


Постановка задачі
1. Розглянути основні особливості задачі квадратичного програмування.
2. Визначити сфери її виникнення та застосування, навести приклади.
3. Зробити огляд методів вирішення задач квадратичного програмування, зокрема:
– лінійний метод
– квадратичний симплекс-метод
4. Програмно реалізувати лінійний метод і квадратичний симплекс-метод. Дослідити їх ефективність у вирішенні задач квадратичного програмування, порівняти їх.
5. Показати роботу цих методів на прикладах.
Активация Windows


Задача квадратичного програмування
$\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) \to min$,
при обмеженнях
$f_i(x) = (c^i, x) - d_i \leq 0$, $i \in I^-$,
$f_i(x) = (c^i, x) - d_i = 0$, $i \in I^0$,
$x \in X^0 = \{x | x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\}$,
де $I^- = \{1, \ldots, m\}$,
$I^0 = \{m+1, \ldots, m+p\}$,
A – симетрична додатно визначена матриця розмірності n x n,
вектор $b \in R^n$.
Активация Windows

Метод спряжених градієнтів

x^0 - початкове наближення, що задовольняє всі обмеження задачі;

p^0 - напрямок антиградієнта;

x^1 - знайдений мінімум вздовж напрямку p^0.

Нехай на k-тому кроці знаходимось у точці x^k. Знаходимо:

p^k - напрямок пошуку

α^k - довжину кроку

точку мінімуму $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$.

Пошук припиняємо, коли виконується задана умова виходу.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Метод розв'язання задач квадратичного програмування з булевими змінними

- Нехай вектор $\overrightarrow{x_0} = (x_1,\ x_2, \dots, x_n), x_i = \{0, 1\}, \forall\, i = \overrightarrow{1, n}$ – один із розв'язків задачі, не обов'язково оптимальний;
- нульовий вектор – $\overrightarrow{x^0} = (0, 0, \dots, 0), x_i = 0, \forall\, i = \overrightarrow{1, n}$;
- ранг (Rang) – число, що має кожен вектор, вказує на те, який x_i потрібно змінювати під час наступного аналізу вектора, Rang = *i;*
- поточний максимум ($F_м$) - максимальне значення функціоналу, досягнуте на даний момент.
- зберегти в стек – зберегти даний вектор з його рангом;
- вилучити із стеку – вилучити із стеку вектор та присвоїти його поточному;
- (P_o) - оптимістичний та (P_G) - гарантований прогнози відповідно;

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Метод розв’язання задач квадратичного програмування з булевими змінними

- $\vec{x} = \overrightarrow{x^0}$, Rang = 1, $F_м = P_G$, $\overrightarrow{x_{опт}} = \vec{x}$
- $x_{Rang} = 1$ => якщо $P_G > F_м$, то $F_м = P_G$, $\overrightarrow{x_{опт}} = \vec{x}$
- $P_0 = (P_0 - P_G)\,\varepsilon_{огр}$ => якщо $P_0 > F_м$, то зберігаємо в стек вектор з рангом Rang = Rang + 1
- стек порожній або Rang = n => $\overrightarrow{x_{опт}}$ є розв’язком => обчислення закінчено.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Методи штрафних функцій

$$f(x) \to min \qquad (1)$$

в області $G \subseteq E^n$, що задається умовами

$$g^i(x) \le 0,\ \ i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Введемо числову функцію $p^i(g^i(x))$, що визначена так:

$$p^i\left(g^i(x)\right) = \begin{cases} 0, & \text{коли } g^i(x) \le 0, \\ +\infty, & \text{коли } g^i(x) > 0. \end{cases}$$

Побудуємо для задач (1)-(2) допоміжну функцію - функцію штрафу :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} p^i\left(g^i(x)\right),\ \ x \in E^n.$$

Поставимо у відповідність до початкової задачі (1), (2) задачу безумовної оптимізації:

$$\varphi(x,r) = f(x) + rP(x) \to min, \qquad (3)$$

де r –керуючий параметр ($r > 0$), на основі якого реалізується вплив штрафу.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Методи штрафних функцій

- Мінімізація функції $\varphi(x, r)$ еквівалентна розв'язуванню задачі (1), (2).
- Безумовна оптимізаційна задача (3) з розривною цільовою функцією заміняється послідовністю безумовних оптимізаційних задач, що залежать від параметра – коефіцієнта штрафу виду (3).
- Усі методи штрафних функцій умовно можна поділити на два види: методи зовнішніх і внутрішніх штрафів. Відмінність між ними - у правилах побудови штрафної функції.
- Методи зовнішніх штрафів доцільно використовувати у випадку, коли область допустимих планів G задачі (1)-(2) не містить внутрішніх точок, наприклад, коли серед обмежень є обмеження-рівності.
- У методах внутрішнього штрафу спеціально побудована штрафна функція призводить до виникнення сильних бар'єрів уздовж межі області G, що перешкоджає виходу за межі G загальної послідовності точок.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Лінійний розв'язок задачі квадратичного програмування

Нехай дана задача квадратичного програмування з цільовою функцією n змінних і замкнутою областю обмежень з m лінійних нерівностей:

$$z(X) = X^T AX + BX \rightarrow max$$

$$CX \geq D; X \geq 0,$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор змінних;

A - матриця квадратичної форми розмірності $n \times n$;

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор лінійної форми;

$D = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$ – вектор констант обмежень;

C – матриця коефіцієнтів обмежень розмірністю $m \times n$.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування

Точка розв'язання безумовної задачі максимізації

$$X^* = -A^{-1}B^T/2$$

знаходиться поза областю обмежень.

В наслідок заміни змінних $X = SWY$,

де S – матриця ортогонального перетворення,

W – масштабуюча діагональна матриця,

та ряду інших перетворень отримаємо задачу:

$$z(Y) = \sum \left(y_i - \frac{p_i}{2}\right)^2 \rightarrow min, i \in [1, n]$$

$$GY \geq Q,$$

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування

- Знаходимо всі видимі з точки безумовного екстремуму Y^* вершини => обираємо найближчу до Y^* вершину - V.
- Опускаємо перпендикуляр від точки Y^* до всіх граней, а згодом ребер, що містять вершину V.
- Як тільки знайдеться точка, яка задовольняє всім заданим обмеженням і лежить на перпендикулярі, що опускається на грань від точки Y^*, вона і буде розв’язком задачі.
- Якщо після вивчення всіх граней така точка не знайдена, то рішенням є вершина V.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Приклад роботи програми.
Вхідні дані

Підприємство виробляє два види продукції і використовує для цього три види продукції. Максимізувати загальний прибуток, якщо ціна реалізації одиниці продукції виду 1 становить 20 ум. од., виду 2 – 18 ум. од., витрати на виробництво пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції. Витрати ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції та їх загальний обсяг задані.

$$f(x, y) = 20x - x^2 + 18y - y^2 \rightarrow \max$$

за умов:

$$x + 3y \leq 30$$

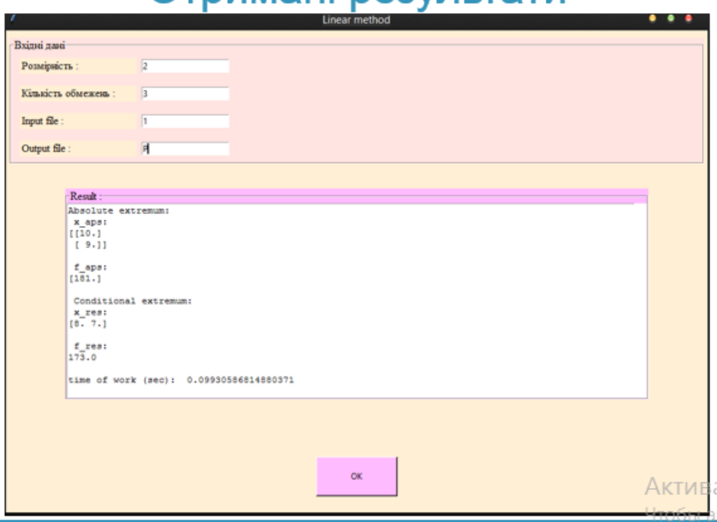
$$x + y \leq 15$$

$$5x + 2y \leq 60$$

$$x, y \geq 0$$

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Приклад роботи програми.
Отримані результати



Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Квадратичний симплекс-метод

Маємо опуклу задачу:

$$f(x) = (Dx, x) + (c, x) \to max, \qquad (4)$$

$$Ax \leq b, \qquad (5)$$

$$x \in X^0 = \{x | x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n}\}. \qquad (6)$$

Функція Лагранжа цієї задачі має вигляд:

$$L(x, \lambda) = (Dx, x) + (c, x) - (\lambda, Ax - b), \ \ \lambda \geq 0. \qquad (7)$$

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Квадратичний симплекс-метод

Необхідні та достатні умови оптимальності:

- вектор $x \geq 0$ є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування т. і т. т., коли існують такі m-вимірні вектори $\lambda \geq 0$, $v \geq 0$ та n-вимірний вектор u, які задовольняють систему

$$\begin{cases} 2Dx + c - A'\lambda + u = 0, & (8) \\ b - Ax - v = 0, & (9) \\ (x, u) = 0, & (10) \\ (\lambda, v) = 0. & (11) \end{cases}$$

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Квадратичний симплекс-метод

- Розв'язок системи (8)-(11) знайдемо за допомогою методу штучних змінних
- Перепишемо систему і введемо штучні змінні $z = (z_1, \dots, z_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ в умови. Вибираючи їх знаки відповідно до знаків вільних членів $(-c)$ та b, складемо псевдоцільову функцію

$$-M \sum_{j=1}^{n} z_j - M \sum_{i=1}^{m} y_i \to max \qquad (13)$$

за умов

$$2Dx - A'\lambda + u + z = -c, \qquad (14)$$

$$Ax + v + y = b. \qquad (15)$$

- Розв'язуючи задачу (13) - (15), виводимо з базису всі штучні змінні та вводимо x, λ, u, v. Якщо знайдений допустимий базисний розв'язок x^0, λ^0, u^0, v^0 задовольняє умови $(x^0, u^0) = 0$, $(\lambda^0, v^0) = 0$, то він і буде оптимальним.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Відмінності від симплекс-методу

- Підмножина базисних змінних $basis$ може містити більше, ніж m змінних, де m – кількість обмежень. У цьому випадку їх значення не визначаються однозначно.
- Проте x_{basis}^* буде оптимальним розв'язком задачі:

$$c_{basis}^T x_{basis} + x_{basis}^T D_{basis} x_{basis} \to min$$
$$A_{basis} x_{basis} = b$$

- Множина $basis$ визначає базисний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ця задача має єдиний оптимальний розв'язок $x_{basis}^* > 0$, який є також допустимим для початкової квадратичної задачі.
- Максимальний розмір базису визначається за наступною формулою:

$$|basis| \le m + rank(D)$$

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Відмінності від симплекс-методу

- У квадратичному симплекс-методі може статися так, що змінна входить до базису, але немає змінної, яка виходить із нього, тож базис збільшується. Це можливо, якщо цільова функція досягає локального мінімуму (коли збільшена вхідна змінна), до того, як якась інша базисна змінна зменшується до нуля.
- Може навіть статися так, що навіть якщо змінна для виходу із базису знайдена, розв’язок у цій точці не є базисним. В такому випадку вибір змінних продовжується, і більше змінних може вийти із базису, поки інший базисний розв’язок не буде знайдено.

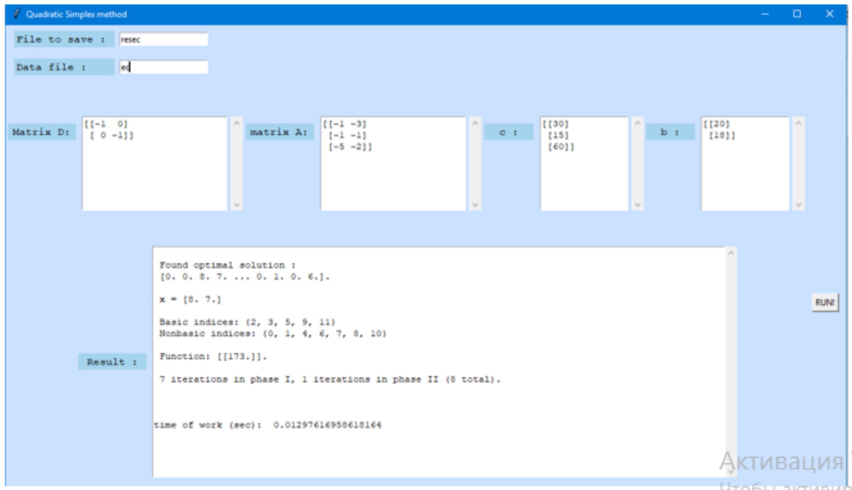
Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Особливості реалізації

- Двох фазний симплекс-метод для вибору початкової допустимої точки для подальшого застосування симплекс-методу.
- Вибір небазисної змінної, яка увійде у базис реалізовано за правилом Бленда. Це правило дає змогу вирішувати задачі лінійної оптимізації без зациклення.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Квадратичний симплекс-метод. Приклад роботи програми



Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Квадратичний симплекс-метод

Отже,

- Було розроблено зрозумілий і простий інтерфейс програми;
- хоча квадратичний симплекс-метод потребує введення додаткових змінних, для задач невеликої розмірності він працює швидко (в середньому 0.009 с);
- завдяки введенню умови додаткової нежорсткості у більшості випадків розв'язок задачі знаходиться іще у першій фазі сиплекс – методу;
- серед розглянутих прикладів двовимірних задач квадратичного програмування розв'язок знаходиться в середньому за 7 ітерацій.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Порівняння методів

Методи\критерії	К-ть змінних	К-ть обмежень	Час роботи (сек)
Лін. метод	2	5	0,16143035
Квадр. сим.-мет.			0,02319143
Лін. метод	2	1	0.01257963
Квадр. сим.-мет			0.00798082352
Лін. метод	2	1	0.00987453
Квадр. сим.-мет			0.0079915524
Лін. метод	2	2	0.008999976
Квадр. сим.-мет			0.0089943409

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера.

Порівняння методів

- Для задач квадратичного програмування невеликої розмірності і декількома обмеженнями квадратичний симплекс-метод знаходить розв'язок швидше, ніж лінійний метод.
- Для великих розмірностей суттєва кількість додаткових змінних у квадратичному симплекс-методі, а також необхідність перевірки умов доповнюючої нежорсткості може значно сповільнити роботу програми. Для таких задач лінійний метод працюватиме швидше.
- Лінійний метод незастосовний для задач, матриця коефіцієнтів цільової функції якої має детермінант нуль, на відміну від квадратичного симплекс-методу.
- Лінійний метод недоцільно використовувати для задач, у яких глобальний екстремум співпадає із локальним.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе

Висновки

- Розглянуто задачу квадратичного програмування та її особливості;
- Розглянуто сфери її застосування та деякі формалізовані приклади;
- Розглянуто, як класичні, так і нові методи вирішення задач квадратичного програмування;
- Реалізовано новий лінійний метод розв'язку квадратичних задач;
- Реалізовано квадратичний симплекс-метод розв'язку квадратичних задач;
- Розроблено зручні інтерфейси для даних програм;
- Досліджено працездатність та ефективність цих методів, виявлено їх недоліки і переваги.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе
параметрам компьютера

Перспективи для подальших досліджень

В подальшому доцільно

- провести порівняння ефективності та швидкості квадратичного симплекс-методу та лінійного методу із ще кількома методами та розробити рекомендації щодо доцільності їх використання залежно від поставленої задачі;
- дослідити роботу цих методів для задач великих розмірностей при значній кількості обмежень.

Активация Windows
Чтобы активировать Windows, пе


ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ!
Активация Windows